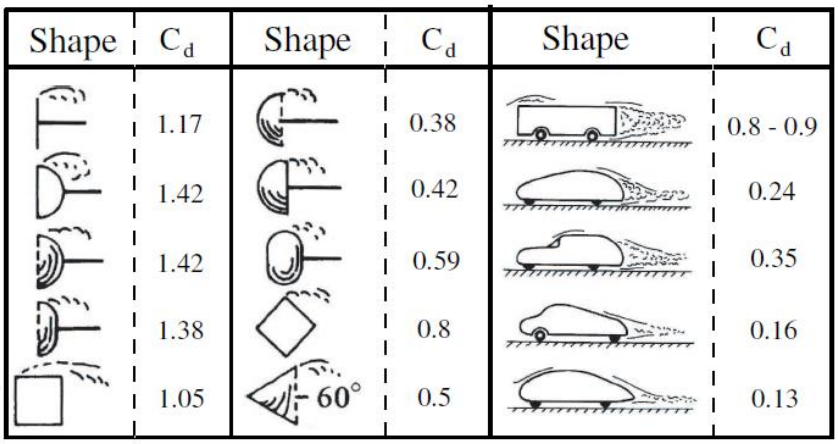
UPOR NA PADANJE SONDE V ZRAKU

1. Hitrost in opravljena pot sonde pri padanju v zraku

Za padanje v zraku je odgovorna sila teže. Poleg sile teže na padajoče telo deluje tudi sila vzgona, ki je enaka teži izpodrinjene tekočine in sila upora, ki omejuje pospešek padanja. Ko je gostota teles, ki padajo v zraku veliko večja od gostote samega zraka običajno velja kvadratni zakon upora, pri čemer je sila upora sorazmerna kvadratu hitrosti padanja teles (za telesom se pri padanju prične zrak vrtinčiti):

$$F_u = \frac{1}{2} C S \rho v^2 \tag{0.1}$$

pri čemer je C koeficient upora, S prečni presek padajočega telesa, ρ gostota tekočine in v hitrost padanja telesa.



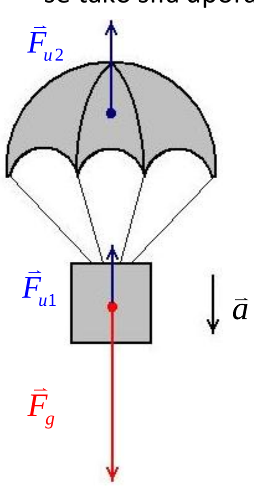
Shape	C_d	Shape	C_d	Shape	C_d
	1.17		0.38		0.8 - 0.9
	1.42		0.42		0.24
	1.42		0.59		0.35
	1.38		0.8		0.16
	1.05	60°	0.5		0.13

Tabela 1: Koeficienti upora specifičen tipov površin predmetov.

Sila vzgona je v primeru, ko je gostota telesa veliko večja od gostote tekočine, prav tako zanemarljiva. Zato je vsota vseh sil, ki delujejo na telo pri padanju enaka vektorski vsoti sile teže in sile upora. Po drugem Newtonovem je vsota vseh zunanjih sil enaka produktu mase sistema in njegovega pospeška:

$$\vec{F}_u + \vec{F}_g = m\vec{a} \tag{0.2}$$

V našem primeru gre za padanje sonde pravokotne oblike (gre za kocko) s padalom skozi zrak. Pojavi se tako sila upora na sondo F_{u1} in sila upora na padalo F_{u2}. Drugi Newtonov zakon, je tako oblike:



$$\vec{F}_u + \vec{F}_g = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad F_{u1} + F_{u1} - F_g = -ma \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} C_1 S_1 \rho v^2 + \frac{1}{2} C_2 S_2 \rho v^2 - mg = -ma$$

$$\left(\frac{1}{2} C_1 S_1 \rho + \frac{1}{2} C_2 S_2 \rho \right) v^2 - mg = -ma \tag{0.3}$$

Gravitacijski pospešek g se do nekaj kilometrov nadmorske višine ne bistveno spreminja zato lahko zan privzamemo vrednost: $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, S_1 je prečni presek sonde in meri d^2, pri čemer je d stranica sonde in S_2 je prečni presek padala in meri πr^2, pri čemer je r polmer padala.

Z večanjem hitrosti se zmanjšuje pospešek padanja sonde in po nekem času doseže terminalno/končno hitrost, ki jo je relativno enostavno izraziti iz enačbe (1.3), ko privzamemo, da je pospešek padanja sonde enak $a = 0\ \mathrm{m/s^2}$. Po krajšem izračunu dobimo končno enačbo za terminalno hitrost:

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho\left(C_1 d^2 + \pi C_2 r^2\right)}} \tag{0.4}$$

Z nekoliko bolj podrobnim matematičnim pristopom, ki presega nivo srednješolskega znanja, lahko analiziramo padanje sonde od trenutka poka balona do pristanka balona ob tleh. To storimo tako, da vpeljemo pospešek kot diferencial hitrosti po času in enačbo integriramo. Še prej pa enačbo (1.3) delimo z $-m$ in obrnemo strani ter jo prepišemo v priročnejšo obliko:

$$-a = \left(\frac{1}{2m}C_1 d^2 \rho + \frac{1}{2m}C_2 \pi r^2 \rho\right)v^2 - g \quad \Rightarrow \quad -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Av^2 - g$$

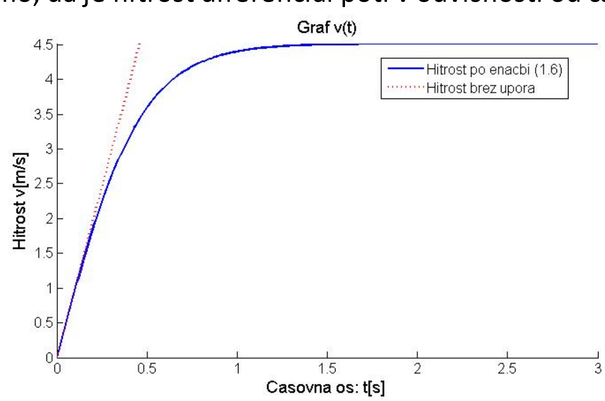
$$-\frac{\mathrm{d}v}{Av^2 - g} = \mathrm{d}t \tag{0.5}$$

Enačba (1.5) je tako pripravna za integracijo, ki da rešitev:

$$-\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{Av^2 - g} = \int_0^t \mathrm{d}t \quad \Rightarrow$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{A}} \cdot \tanh\left(Ag \cdot t\right); \quad A = \left(\frac{1}{2m}C_1 d^2 \rho + \frac{1}{2m}C_2 \pi r^2 \rho\right) \tag{0.6}$$

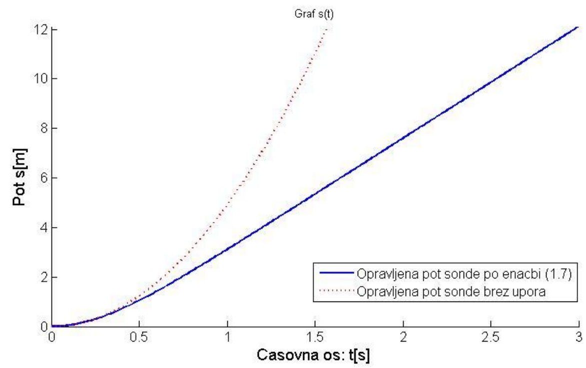
Dobili smo enačbo hitrosti v odvisnosti od časa. Podobno lahko pridelamo enačbo poti v odvisnosti od časa, kjer se zavedamo, da je hitrost diferencial poti v odvisnosti od časa.



Graf 1: Graf prikazuje kvantitativno spreminjanje hitrosti padanja sonde s časom, v realnem primeru in primeru, ko na sondo ne bi delovala sila upora (na primer v vakuumu). Parametri: radij padala 0,4 m, velikost stranice sonde 0,3 m, gostota zraka 1,2 kg/m^3 temperatura zraka 20 °C.

Enačbo (1.6) integriramo po času in dobimo enačbo opravljene poti v času za padanje sonde:

$$s(t) = \frac{1}{A}\log\left(\cosh\left(\sqrt{Ag}\cdot t\right)\right) \tag{0.7}$$



Graf 2: Graf prikazuje kvantitativno spreminjanje opravljene poti pri padanju sonde s časom, v realnem primeru in primeru, ko na sondo ne bi delovala sila upora (na primer v vakuumu). Parametri: radij padala 0,4 m, velikost stranice sonde 0,3 m, gostota zraka 1,2 kg/m^3 temperatura zraka 20 °C.

2. Vpliv spreminjanja gostote, tlaka in temperature na padanje sonde

Zavedati se je potrebno, da bo sonda poletela v nad višino 30 km. Z naraščanjem višine padata tako tlak kot gostota zraka, spreminja se pa tudi temperatura zraka. Osnovne tri termodinamične spremenljivke (T - temperatura, p - tlak in V - prostornina) so tesno povezane med sabo preko plinske enačbe, ki velja za idealen plin. Za zrak v zemeljski atmosferi lahko privzamemo, da se obnaša kot idealen plin:

$$pV = \frac{m}{M} RT \qquad (0.8)$$

M je molska masa zraka M = 29 kg/kmol, R je splošna plinska konstanta R = 8314 J / kmolK. Vemo tudi, da je z maso in prostornino definirana gostota sredstva $\rho = m/V$ in tako prepišemo splošno plinsko enačbo v nam primernejšo obliko:

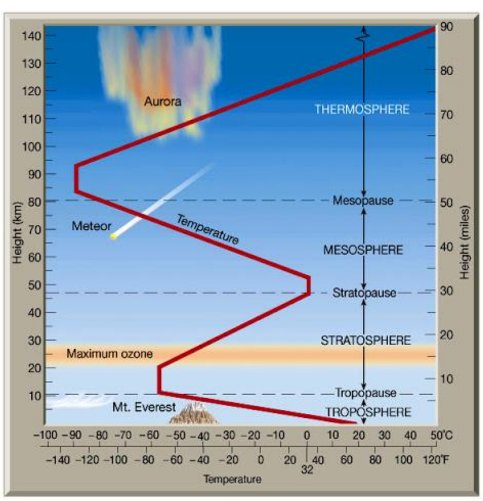
$$p = \rho \frac{RT}{M} \qquad (0.9)$$

Zavedati se je še potrebno, da z naraščanjem višine h tlak pada:

$$p = p_0 - \rho g h \qquad (0.10)$$

p_0 je tlak pri tleh. Privzamemo še, da je višina pri tleh enaka 0 m in narašča v navpični smeri. Iz Newtonovega gravitacijskega zakona se da sklepati, da se gravitacijski pospešek za prvih nekaj deset višinskih kilometrov ne bistveno razlikuje in zato lahko privzamemo, da je konstanten g = 9,8 m/s^2. Iz enačb (2.2) in (2.3) vidimo, da je gostota zraka funkcija višine in temperature:

$$\rho(h,T) = \frac{p_0}{gh + \frac{RT}{M}} \qquad (0.11)$$



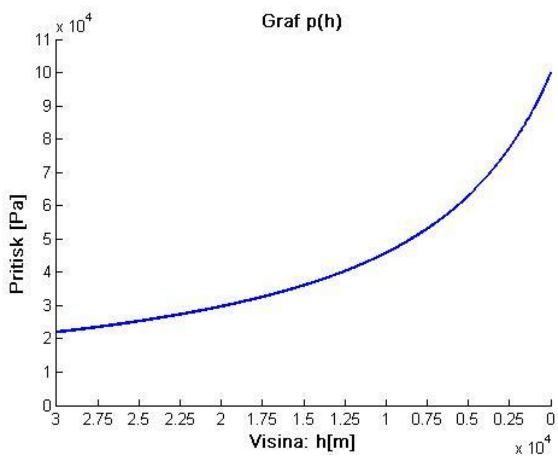
Slika 1: Slika prikazuje spreminjanje temperature v zemeljski atmosferi (temperaturni gradient).

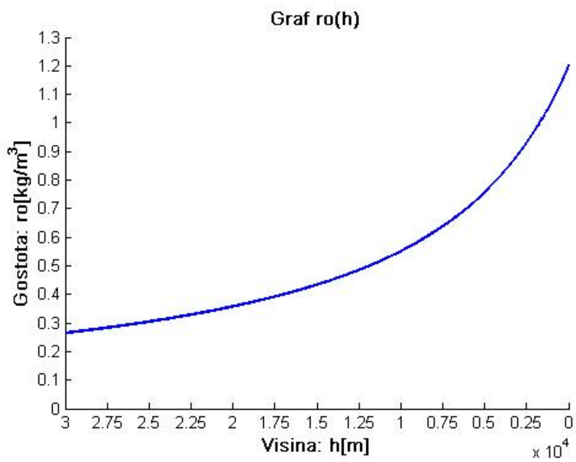
Če dobro premislimo, pripomore po enačbi (2.4) k spreminjanju gostote največ člen s parametrom višine. Če računamo, kot da se temperatura s časom ne spreminja in privzamemo, da je enaka temperaturi zraka pri tleh, naredimo kvečjemu 10% napako pri računanju gostote. To naših izračunov ne pretirano zmede in ker nimamo natančnih podatkov o spreminjanju tempe-rature z višino za prvih nekaj deset kilometrov nadmorske višine, je to cena, ki smo jo pripravljeni plačati. Tako enačbo (2.4) prepišemo v obliko:

$$\rho(h) = \frac{p_0}{gh + \frac{RT_0}{M}} \tag{0.12}$$

Na enak princip lahko iz enačb (2.2) in (2.3) izrazimo enačbo za spreminjanje tlaka z višino:

$$p(h) = \frac{p_0}{1 + \frac{Mg}{RT_0} \cdot h} \tag{0.13}$$





Graf 3 in graf 4: Grafa prikazujeta kvantitativno spreminjanje tlaka in gostote zraka z nadmorske višine 30 km do nadmorske višine 0 km. Tlak in gostota sta medsebojno povezana zato tudi vidimo podobnost med grafoma. Tlak tik ob tleh je 1,0 bara, gostota zraka ob tleh pa znaša 1,2 kg/m^3.

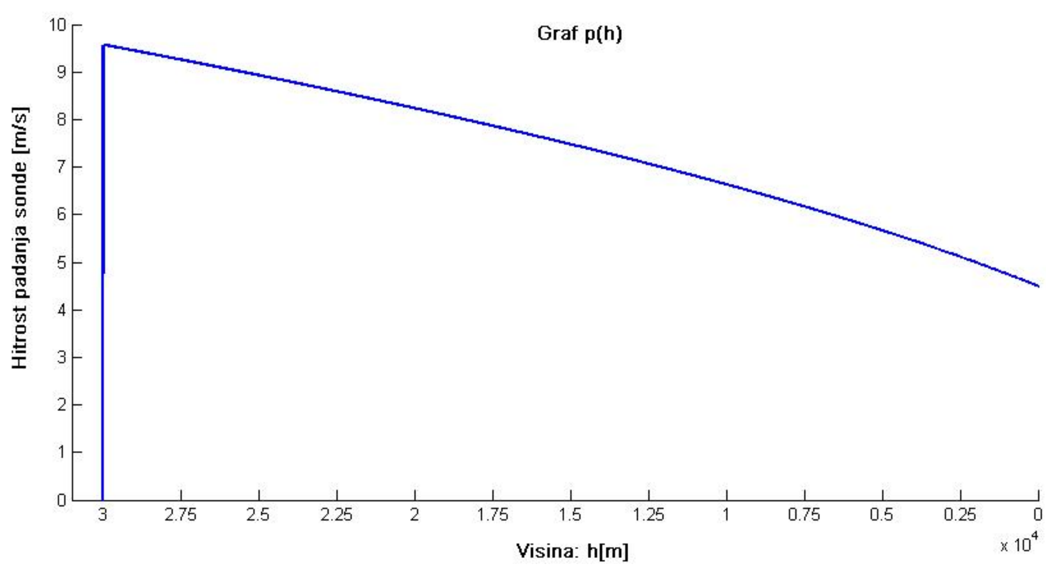
3. Napoved padanja sonde v zraku 30 km nadmorske višine

Sedaj razumemo, da je hitrost padanja sonde odvisna od več parametrov. Pomembna je sila upora, ki zavira gibanje. Velja kvadratni zakon upora, kar pomeni, da je ključni parameter gostota sredstva. Iz grafa ?? lahko razberemo, da se z višino gostota spreminja, kar bistveno vpliva na silo upora in posledično na hitrost padanja sonde. Gostota je funkcija temperature in višine (enačba (2.4)). Višino na kateri se nahaja sonda, si pomagamo izračunati iz enačbe (1.7), pri čemer navedemo začetno višino h_0, kot višino na kateri balon poči in prične sonda s padalom prosto padati:

$$h(t) = h_0 - s(t) \tag{0.14}$$

Enačba (3.1) je povezana tudi z gostoto zraka, ki pa je hkrati tudi funkcija višine. Na tem mestu tako pridemo v zagato. Povezati enačbe na analitični ravni ni enostavno, zato si bomo pri izračunu hitrosti padanja sonde pomagali z numerično analizo. To pomeni, da je potrebno zapisati program, ki bo računal hitrost padanja po korakih. Programu je potrebno podati začetne parametre (gostoto in višino) in nato postopoma v majhnih časovnih korakih izračunati hitrost, višino in gostoto ter izračunani podatek o gostoti uporabiti pri naslednji meritvi. Za izračun je potrebno uporabiti eno izmed numeričnih metod. V našem primeru bomo uporabili metodo Runge - Kutta 4. reda. Postopek reševanja s to metodo je opisan na zadnji strani.

Tako dobimo grafičen prikaz hitrosti padanja sonde v odvisnosti od višine na kateri se sonda nahaja:



Graf 5: Graf prikazuje kvantitativno spreminjanje hitrosti padanja sonde z višino v realnem primeru. Parametri: radij padala 0,4 m, velikost stranice sonde 0,3 m, višina na kateri balon poči je 30 km. V višjih plasteh zraka je terminalna hitrost padanja sonde bistveno večja, ker je gostota zraka v teh plasteh manjša kot pri tleh. Maksimalno hitrost 9,6 m/s doseže sonda po nekoliko več kot 40 m prostega pada. Nato se zaradi višanja gostote zraka sonda zaustavlja in ob tla zadane s hitrostjo 4,5 m/s.

4. Zaključek

Iz analize vidimo, da če želimo popolnoma analizirati padanje sonde skozi zrak naletimo na mnogo parametrov, ki otežujejo naše izračune. Pridemo do točke, kjer analitične metode reševanja odpovejo in smo zato primorani uporabiti numerične metode. Zato se je potrebno naučiti operirati z računalniškimi orodji kot so Matlab, Mathematica, …, s katerimi lahko naredimo celotno analizo padanja sonde in tako pridelamo rezultate, ki so za nas pomembni.

Z dobljenimi rezultati smo zadovoljni, saj nam je ta analiza podala kar nekaj informacij o padanju sonde. Pri tem smo naredili tudi programe, s katerimi lahko preverjamo, kako je hitrost padanja sonde povezana z dimenzijami in maso padala in sonde.

V nadaljevanju bomo opravili še nekaj praktičnih poizkusov s katerimi bomo preverili ujemanje teorije in prakse. Naredili bomo video analizo padanja sonde in s pomočjo dimenzijske analize izrazili hitrost padanja sonde v odvisnosti od časa in višine padanja sonde.

RUNGE - KUTTA 4. REDA

Matlab ima že integrirano funkcijo Runge-Kutta 4. reda pod imenom *ode45.m* ali *ode23.m*. Vseeno smo sestavili svoj program, ker je to bolj poučno, povrh vsega pa ga še lahko sami prilagodimo svojim potrebam. Program ima ime *balon2.m*. Enačbo (1.3) prevedemo na diferencialno enačbo drugega reda:

$$\left(\frac{1}{2}C_1 S_1 \rho + \frac{1}{2}C_2 S_2 \rho\right)\dot{y}^2 - mg = -m\ddot{y}$$

in jo nato prevedemo na diferencialno enačbo prvega reda:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(t, x, y)$$

z znanima začetnima pogojema $x(0) = x_0$ in $y(0) = y_0$. V našem primeru je $y = h$ (višina) in $y_0 = h_0 = 30000\ \mathrm{m}$ ter $x = v$ (hitrost padanja sonde) $x_0 = v_0 = 0\ \mathrm{m/s}$. Velja:

$$\begin{aligned}
k_1 &= y & l_1 &= f\left(t, x, y\right), \\
k_2 &= y + \frac{1}{2}h l_1 & l_2 &= f\left(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}h k_1, y + \frac{1}{2}h l_1\right), \\
k_3 &= y + \frac{1}{2}h l_2 & l_3 &= f\left(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}h k_2, y + \frac{1}{2}h l_2\right), \\
k_4 &= y + h l_2 & l_4 &= f\left(t + h, x + h k_3, y + h l_3\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x\left(t+h\right) &= x + \frac{1}{6}h\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) + \mathcal{O}\left(h^5\right). \\
y\left(t+h\right) &= y + \frac{1}{6}h\left(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4\right) + \mathcal{O}\left(h^5\right).
\end{aligned}$$

V programu lahko sami prilagajamo dolžino korakov *h*, v našem primeru smo uporabili *h* = 0,05.